Prépa agreg
Cours option B

Année 2024-2025
mi-song.dupuy@sorbonne-universite.fr

Optimisation : notes de cours

Table des matières

Introduction à l'optimisation continue

Soient X un espace de Banach, Ω une partie de X et A un sous-ensemble de Ω. On considère une fonction $J : \Omega \to \mathbb{R}$.

On s'intéresse dans ce cours aux deux types de problèmes suivants

(i)
$$\text{Trouver } x_* \in \Omega \text{ vérifiant } J(x_*) = \inf_{x\in\Omega} J(x).$$

(ii)
$$\text{Trouver } x_* \in A \subsetneq \Omega \text{ vérifiant } J(x_*) = \inf_{x\in A} J(x).$$

Le premier problème est appelé *problème d'optimisation (continue) sans contrainte*. Le second problème est un *problème d'optimisation (continue) avec contraintes*. Ces contraintes peuvent être de type

- $\star$ convexes : A est un ensemble convexe fermé
- $\star$ égalité
$$A = \{x \in \Omega,\, g_i(x) = 0,\, 1 \le i \le p\} \tag{1}$$
- $\star$ inégalité
$$A = \{x \in \Omega,\, h_i(x) \le 0,\, 1 \le i \le q\} \tag{2}$$

Dans(1) et (2), les fonctions h_i et g_i sont au moins continues.

La fonction J est appelée la fonction **coût** (ou encore fonction objectif, ou critère) et le sous-ensemble A définissant les contraintes, l'ensemble des *éléments admissibles.*

1 Calcul différentiel

On pourra trouver une introduction au calcul différentiel dans le livre de Ciarlet [Cia82, Chapitre 7].

1.1 Dérivabilité

Définition 1.1. *On dit qu'une fonction $f : \Omega \to Y$ où Ω est un ouvert de X est dérivable en un point x de Ω s'il existe une application linéaire continue $\mathrm{d}f(x) : X \to Y$ telle que pour tout h dans un voisinage de 0 on a*

$$f(x + h) = f(x) + \mathrm{d}f(x)h + o(\|h\|).$$

Si f est dérivable en tout point de Ω, on dit que f est dérivable sur Ω.

Si de plus l'application $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ est continue, on dit que f est continûment dérivable dans Ω.

On rappelle qu'une fonction dérivable en un point est continue en ce point.

1.1.1 Cas $X = \mathbb{R}^p$ et $Y = \mathbb{R}^q$

Dans le cas où $Y = \mathbb{R}^q$, en utilisant le fait que $\mathbb{R}^q = \overset{q}{\underset{i=1}{\times}} \mathbb{R}$, on peut écrire f selon ses composantes $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{bmatrix}$.

Dans ce cas, f est dérivable en $x \in \Omega$ si et seulement si chacune de ses composantes f_j est dérivable en x. On a alors
$$\mathrm{d}f(x) = \begin{bmatrix} \mathrm{d}f_1(x) \\ \vdots \\ \mathrm{d}f_q(x) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, alors on peut écrire $x \in \mathbb{R}^p$ en fonction de ses composantes $x = [x_1, \ldots, x_p]^T$ et considérer, par exemple pour $(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_p)$ fixé la fonction $y_k \mapsto f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_p)$. Si cette fonction est dérivable en x_k, on note $\partial_k f(x)$ cette dérivée appelée *dérivée partielle de la fonction f au point x par rapport à la k-ième variable.*

Proposition 1.2. *Si $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^q$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ est dérivable en $x \in \Omega$, alors f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables. De plus pour $h \in \mathbb{R}^p$, on a*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x)h &= \sum_{k=1}^{p} \partial_k f(x) h_k, \quad \text{où } h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \dots & \partial_p f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \dots & \partial_p f_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_q(x) & \partial_2 f_q(x) & \dots & \partial_p f_q(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice $(\partial_i f_j(x))_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ est appelée matrice jacobienne de f en x.

Démonstration. La preuve est immédiate en utilisant la linéarité de $\mathrm{d}f(x)$ et en regardant la définition de la dérivée pour $h = te_k$ où e_k est le k-ième vecteur de la base canonique. □

Remarque 1.3. *La réciproque est fausse. La fonction $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas continue en 0 et admet des dérivées partielles selon les deux variables.*

Un autre contre-exemple classique est la fonction $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Cette fonction peut être prolongée continûment en 0 et admet des dérivées partielles selon toutes les directions mais n'est pas dérivable en 0.

Théorème 1.4 (Composition des dérivées)**.** *Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ une fonction dérivable en $x \in \Omega$, $g : \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}^r$ une fonction dérivable en $f(x)$. On suppose que $f(\Omega) \subset \widetilde{\Omega}$ alors $g \circ f$ est dérivable en x et*

$$\mathrm{d}(g \circ f)(x) = \mathrm{d}g(f(x))\mathrm{d}f(x),$$

où de façon matricielle

$$\begin{bmatrix} \partial_1 (g \circ f)_1(x) & \dots & \partial_p (g \circ f)_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 (g \circ f)_r(x) & \dots & \partial_p (g \circ f) f_r(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1(f(x)) & \dots & \partial_q g_1(f(x)) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 g_r(f(x)) & \dots & \partial_q g_r(f(x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_p f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_q(x) & \dots & \partial_p f_q(x) \end{bmatrix} \tag{4}$$

Remarque 1.5. *On en déduit alors la règle de la chaîne (dans le cas où $r = 1$)*

$$\partial_i (g \circ f)(x) = \sum_{j=1}^{q} \partial_j g(f(x)) \partial_i (f_j(x)).$$

1.2 Dérivées secondes

On considère une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ une fonction dérivable sur Ω.

Sa dérivée est alors une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$, que l'on peut identifier à l'espace des matrices $\mathbb{R}^{q \times p}$. Si la dérivée $\mathrm{d}f$, vue en tant que fonction de

$\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{q\times p}$ est elle-même dérivable en un point $x \in \Omega$, on note $d^2 f(x)$ sa dérivée seconde, qui est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{q\times p}$.

On peut alors associer $\mathrm{d}^2 f(x)$ à une application bilinéaire $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, que l'on notera aussi $\mathrm{d}^2 f(x)$ par abus de notation.

Si $\mathrm{d}^2 f(x)$ existe pour tout $x \in \Omega$, alors on dit que f est dérivable deux fois dans Ω. Si de plus, $x \mapsto \mathrm{d}^2 f(x)$ est continue, on dit que f est deux fois continûment dérivable dans Ω.

Remarque 1.6. *Par le théorème de Schwarz, si f est deux fois continûment dérivable dans Ω, alors $\mathrm{d}^2 f(x)$ est une application bilinéaire symétrique.*

On se place maintenant dans le cas où $q = 1$ et où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment dérivable dans Ω. On peut alors écrire pour tout $x, h, k \in \mathbb{R}^p$

$$\mathrm{d}^2 f(x)[h,k] = \sum_{i,j=1}^{p} h_i k_j \mathrm{d}^2 f(x)[e_i, e_j],$$

où par définition $\mathrm{d}^2 f(x)[e_i, e_j] = \partial_i(\partial_j f)(x) = \partial_j(\partial_i f)(x)$. On note alors ces dérivées $\partial^2_{ij} f(x)$, que l'on appelle *dérivées partielles secondes de f en x.*

1.3 Formules de Taylor

Théorème 1.7. *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment dérivable dans Ω. Pour tout $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^p$, tel que $x + h \in \Omega$, on a*

$$f(x+h) = f(x) + \mathrm{d}f(x)h + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(x)[h,h] + o(\|h\|^2). \tag{5}$$

1.4 Gradient et Hessienne

Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est deux fois continûment dérivable et si $\mathbb{R}^p$ est muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, l'application linéaire $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ peut être identifiée par le théorème de représentation de Ritz avec un unique vecteur de $\mathbb{R}^p$, noté $\nabla f(x)$ vérifiant

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^p, \mathrm{d}f(x)h = \langle \nabla f(x), h\rangle.$$

Remarque 1.8. *Si le produit scalaire change, le gradient est différent !*

La matrice hessienne de f est la matrice symétrique notée $Hf(x) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des dérivées partielles secondes

$$Hf(x) = \begin{bmatrix} \partial^2_{11} f(x) & \dots & \partial^2_{1p} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{p1} f(x) & \dots & \partial^2_{pp} f(x) \end{bmatrix}.$$

On peut alors réécrire les formules de Taylor en utilisant le gradient et la matrice hessienne : pour tout $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $x + h \in \Omega$, on a

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, Hf(x)h\rangle + o(\|h\|^2).$$

2 Existence de minima et fonctions convexes

2.1 Existence d'un minimum

On considère une fonction $J : \Omega \subset X \to \mathbb{R}$ où Ω est ouvert et X est un espace de Banach.

Définition 2.1. *Soit $J : \Omega \to \mathbb{R}$, $A \subset \Omega$.*

- $\star$ *J admet un minimum global sur A si*

$$\exists x_* \in A, \quad \forall x \in A,\ J(x) \geq J(x_*).$$

x_* est alors appelé minimiseur de J sur A*.*

- $\star$ *J admet un minimum local en $x_* \in A$ si*

$$\exists \Omega \in \mathcal{V}(x_*), \quad \forall x \in \Omega \cap A,\ J(x) \geq J(x_*).$$

x_* est alors appelé minimiseur local de J sur A*.*

Proposition 2.2. *Soit $x_* \in \Omega$ un minimiseur local de J. Si J est dérivable continûment sur Ω, alors $\mathrm{d}J(x_*) = 0$.*

Il est essentiel que Ω soit ouvert pour avoir $\mathrm{d}J(x_*) = 0$. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour garantir que x_* est un minimum local de J. On peut affiner ce résultat si on a accès à la seconde dérivée de J.

Proposition 2.3. *Soit J une fonction deux fois dérivables sur Ω un ouvert de X un espace de Banach.*

(i) si x_* est un minimiseur local de J, alors $\mathrm{d}^2J(x_*)$ est semi-définie positive, c'est-à-dire que pour tout $h \in X$, on a $\mathrm{d}^2J(x_*)[h,h] \geq 0$.

(ii) si $x_* \in \Omega$ vérifie $\mathrm{d}J(x_*) = 0$ et il existe $\alpha > 0$, telle que pour tout $h \in X$, $\mathrm{d}^2J(x_*)[h,h] \geq \alpha\|h\|^2$, alors x_* est un minimiseur local de J.

Démonstration. La preuve repose sur la formule de Taylor (5). □

Définition 2.4 (Coercivité)**.** *Soit $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction où X est un espace de Banach. On dit que J est coercive si $\lim_{\|x\| \to \infty} J(x) = \infty$.*

En dimension finie, si J est continue et coercive, on peut alors montrer l'existence d'un minimiseur.

Proposition 2.5. *Soit $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue et coercive. Alors J admet au moins un minimiseur x_*,* i.e. *pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $J(x_*) \leq J(x)$.*

Avant de passer à la preuve de ce résultat, on énonce la définition d'une suite minimisante.

Définition 2.6. *On appelle suite minimisante de J dans A une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} J(u_n) = \inf_{x \in A} J(x).$$

Démonstration. On condidère une suite minimisante $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, par coercivité, cette suite est bornée. On en extrait une sous-suite $(J(x^{(\phi(n))}))$ convergente car $(x^{(n)})$ est une suite en dimension finie. Par continuité de J, $(J(x^{(\phi(n))}))$ tend vers le minimum de J sur $\mathbb{R}^d$. □

En dimension infinie, comme un ouvert borné n'est pas nécessairement compact, il n'est pas possible de conclure sur l'existence d'un minimiseur. Habituellement, il faut une hypothèse de compacité ou une hypothèse de continuité par passage à la limite faible (voir Remarque 2.15).

2.2 Fonctions convexes

On rappelle qu'un ensemble convexe C d'un espace de Banach X est un ensemble tel que pour tout $(x, y) \in C^2$ et $t \in [0, 1]$, on a $tx + (1-t)y \in C$.

Définition 2.7. *Soit C un convexe d'un ; $J : C \to \mathbb{R}$ est convexe si*

$$\forall (x,y) \in C \times C, \quad \forall t \in [0,1], \quad J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y).$$

Proposition 2.8. *Soit U un* **ouvert convexe** *de $\mathbb{R}^n$ et J une fonction différentiable de U dans $\mathbb{R}$. On a équivalence entre*

(i) J est convexe

(ii) Le graphe de J est "au-dessus de ses tangentes"

$$\forall (x,y) \in U \times U, \quad J(y) \geq J(x) + \langle \nabla J(x), y - x \rangle$$

(iii) L'application $\nabla J : U \to \mathbb{R}^n$ est "monotone"

$$\forall (x,y) \in U \times U, \quad \langle \nabla J(y) - \nabla J(x), y - x \rangle \geq 0$$

De plus il y a équivalence entre la convexité stricte de J et les inégalités (ii) et (iii) rendues strictes, pour $x \neq y$.

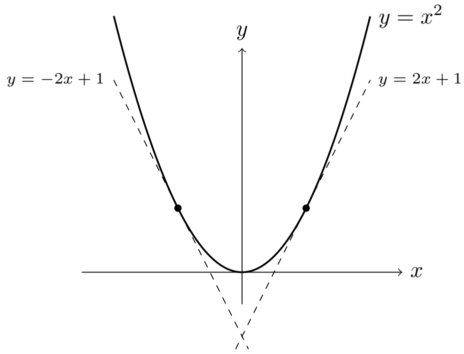

FIGURE 1 – Illustration du graphe d'une fonction convexe au dessus de ses tangentes

Proposition 2.9. *Soit U un* **ouvert convexe** *de $\mathbb{R}^n$ et J une fonction deux fois différentiable de U dans $\mathbb{R}$. On a équivalence entre*

(i) J est convexe

(ii) $H_J(x)$ est semi-définie positive pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \langle HJ(x)h, h \rangle \geq 0.$$

Une fonction convexe n'a pas nécessairement de minimum (par exemple la fonction exp sur $\mathbb{R}$). Une sous-classe de fonctions convexes qui admettent un minimum est la classe des fonctions dites α-convexes.

Fonctions α-convexes

Définition 2.10. *Soit C un convexe d'un espace vectoriel normé, $J : C \to \mathbb{R}$ est α-convexe avec $\alpha > 0$ si $J - \frac{\alpha}{2}\| \cdot \|^2$ est convexe.*

Il existe une autre définition équivalente pour l'α-convexité.

Proposition 2.11. *Soit C un convexe d'un espace vectoriel normé, $J : C \to \mathbb{R}$. J est α-convexe si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in C \times C, \quad \forall t \in [0,1], \quad J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|x - y\|^2.$$

Démonstration. Supposons $J - \frac{\alpha}{2}\| \cdot \|^2$ est convexe et montrons que

$$\forall (x,y) \in C \times C, \quad \forall t \in [0,1], \quad J(tx + (1-t)y) \leq tJ(x) + (1-t)J(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|x - y\|^2.$$

Soit $x, y \in C$ et $t \in [0,1]$, alors par convexité de $J - \frac{\alpha}{2}\| \cdot \|^2$, on a

$$\begin{aligned} tJ(x) - \frac{\alpha}{2} t\|x\|^2 + (1-t)J(y) - \frac{\alpha}{2}(1-t)\|y\|^2 &\geq J(tx + (1-t)y) - \frac{\alpha}{2}\|tx + (1-t)y\|^2 \\ &\geq J(tx + (1-t)y) - \frac{\alpha}{2}(\|y\|^2 + 2t\langle y, x - y\rangle + t^2\|x - y\|^2) \\ &\geq J(tx + (1-t)y) - \frac{\alpha}{2}((1-2t)\|y\|^2 + 2t\langle y, x\rangle + t^2\|x - y\|^2). \end{aligned}$$

Donc on a

$$tJ(x) + (1-t)J(y) - \frac{\alpha}{2}(t\|x\|^2 + t\|y\|^2 - 2t\langle x, y\rangle) + \frac{\alpha}{2} t^2\|x - y\|^2 \geq J(tx + (1-t)y),$$

d'où

$$tJ(x) + (1-t)J(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t)\|x - y\|^2 \geq J(tx + (1-t)y).$$

En reprenant les calculs, on obtient la réciproque. $\square$

Proposition 2.12. *Soit U un* **ouvert convexe** *de $\mathbb{R}^n$ et J une fonction différentiable de U dans $\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes*

$$\begin{aligned} J \text{ est } \alpha\text{-convexe } &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in U \times U, \quad J(y) \geq J(x) + \langle \nabla J(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in U \times U, \quad \langle \nabla J(y) - \nabla J(x), y - x\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Une conséquence de cette proposition est que si J est α-convexe, alors elle est coercive.

Proposition 2.13. *Soit U un* **ouvert convexe** *de $\mathbb{R}^n$ et J une fonction deux fois différentiable de U dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$J \text{ est } \alpha\text{-convexe } \Leftrightarrow \forall (x,h) \in U \times \mathbb{R}^n, \langle HJ(x)h, h\rangle \geq \alpha\|h\|^2.$$

Les propositions précédentes sont des conséquences immédiates de la convexité de $J - \frac{\alpha}{2}\| \cdot \|^2$.

Pour les fonctions α-convexes, on peut alors montrer que le problème d'optimisation sans contrainte est bien posé.

Théorème 2.14 (Existence et unicité d'un minimum de fonctions α-convexes.)**.** *Soit J : $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction α-convexe continue. Alors il existe un unique minimum x_* de J sur $\mathbb{R}^d$ et on a*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \|x - x_*\|^2 \leq \frac{2}{\alpha}[J(x) - J(x_*)]. \tag{6}$$

Démonstration. Une fonction α-convexe est nécessairement coercive, donc J admet un minimiseur x_*. Par α-convexité, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$J(x) \geq J(x_*) + \langle \nabla J(x_*), x - x_* \rangle + \frac{\alpha}{2}\|x - x_*\|^2 \geq J(x_*) + \frac{\alpha}{2}\|x - x_*\|^2.$$

Ainsi, si $x \neq x_*$, $J(x) > J(x_*)$, d'où l'unicité du minimum. □

Remarque 2.15. *Si $J : X \to \mathbb{R}$ est une fonction α-convexe dérivable sur X où X est un espace de Banach, on peut montrer l'existence et l'unicité du minimiseur. Pour l'existence, la suite minimisante est nécessairement bornée dans X. On peut en extraire une sous-suite, notée $(x^{(n)})$, qui converge faiblement vers x_*. On a alors par définition de la convexité*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, J(x^{(n)}) \geq J(x_*) + \mathrm{d}J(x_*)(x^{(n)} - x_*).$$

L'application $\mathrm{d}J(x_*)$ est aussi continue pour la topologie faible, donc $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}J(x_*)(x^{(n)} - x_*) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} J(x^{(n)}) \geq J(x_*)$. Or $(x^{(n)})$ est une suite minimisante donc x_* est un minimiseur.

La dérivabilité de J n'est pas nécessaire pour montrer l'existence du minimum, on peut la remplacer en utilisant la notion de sous-différentielle pour les fonctions convexes.

2.3 Existence de minimiseur pour des problèmes avec contraintes

On considère une fonction continue $J : \Omega \to \mathbb{R}$ où Ω est un ouvert de X un espace de Banach. Soit $A \subset \Omega$ un ensemble fermé, appelé dans la suite *ensemble admissible*. Dans cette partie, le problème qui nous intéresse est le problème d'optimisation sous contraintes

$$\text{Trouver } x_* \in A \subsetneq \Omega \text{ vérifiant } J(x_*) = \inf_{x \in A} J(x). \tag{7}$$

On peut alors énoncer un résultat d'existence analogue au cas sans contrainte.

Proposition 2.16 (Existence d'un minimiseur)**.** *Soit $J : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue coercive et A un ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$. Alors le problème (7) admet une solution $x_* \in A$.*

Démonstration. On considère une suite minimisante. Par coercivité, cette suite est bornée. Il existe une sous-suite convergente. Par fermeture de A, la limite de cette sous-suite est bien dans A. □

2.3.1 Contraintes d'égalités

Dans le cas de contraintes d'égalité, A est décrit par un ensemble de fonctions $(g_i)_{1\leq i\leq p}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ supposées continues. L'ensemble admissible A est alors donné par

$$A = \{x \in \Omega \mid \forall\, 1 \leq i \leq p, g_i(x) = 0\}.$$

Théorème 2.17 (Extrema liés)**.** *Soient J, g_1, ..., g_p : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables et $A = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall\, 1 \leq i \leq p, g_i(x) = 0\}$. On suppose*

- ⋆ *qu'il existe* $x_* \in A$ *tel que* $J(x_*) = \inf_{x\in A} J(x)$
- ⋆ *que la famille* $(\nabla g_1(x_*), \dots, \nabla g_p(x_*))$ *est libre (condition de qualification des contraintes).*

Alors il existe des réels λ_1, ..., λ_p *(appellés multiplicateurs de Lagrange) tels que*

$$\nabla J(x_*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x_*) = 0. \tag{8}$$

Cette équation est appelée équation d'Euler-Lagrange*.*

Pour chercher un minimum au problème d'optimisation sous contraintes d'égalité, on peut chercher à résoudre pour $(x_*, \lambda) \in A \times \mathbb{R}^p$ l'équation d'Euler-Lagrange (8). Toutefois, il faut noter que l'équation d'Euler-Lagrange est une condition nécessaire mais pas suffisante pour caractériser le minimum de J sur A. Si on considère par exemple le problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|^2=1} \langle x, Mx\rangle,$$

où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, la contrainte s'écrit $A = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = \|x\|^2 - 1 = 0\}$. Dans ce cas, $\nabla J(x) = 2Ax$ et $\nabla g(x) = 2x$, donc l'équation d'Euler-Lagrange est $Mx + \lambda x = 0$ qui a des solutions $x \neq 0$ si λ est l'opposé d'une valeur propre de M. Le minimum du problème sous contraintes est atteint pour x un vecteur propre associé de la plus petite valeur propre λ_1 de M et $\lambda = -\lambda_1$. On note également que si la condition de qualification des contraintes n'est pas vérifié, on a $x = 0$, donc n'importe quel λ permet de satisfaire l'équation d'Euler-Lagrange.

Si la condition de qualification des contraintes n'est pas satisfaite, deux cas de figure sont possibles :

- ⋆ les contraintes sont redondantes au minimiseur x_* et on peut écrire une équation d'Euler-Lagrange sur un nombre réduit de contraintes ;
- ⋆ l'équation d'Euler-Lagrange peut ne pas avoir de solution même si le problème de minimisation sous contraintes est bien posé. Considérons l'exemple J et g sont des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ où $g(x) = \|x\|^2$ et $J(x) = x_1$. Dans ce cas, $\nabla J(x) = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ et $\nabla g(x) = 2x$ donc l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \lambda x = 0$. Or $x \in A$ mais A est réduit au singleton $\{0\}$, donc l'équation d'Euler-Lagrange n'admet pas de solution mais le problème de minimisation sous contraintes est bien posé (vu qu'il est réduit à un singleton).

Nous allons montrer ce théorème dans le cas plus simple où $\begin{bmatrix}g_1(x)\\ \vdots \\ g_p(x)\end{bmatrix} = Cx + b$, pour une matrice $C \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^p$.

Démonstration du Théorème 2.17 dans un cas simplifié. Soit $x_* \in A$ un minimiseur du problème sous contraintes d'égalité. Pour tout $x \in A$ et $t \in \mathbb{R}$, on a $(1-t)x_* + tx \in A$. Par définition de x_*, on a alors

$$J((1-t)x_* + tx) \geq J(x_*).$$

Donc on a $\langle \nabla J(x_*), x - x_* \rangle = 0$ pour tout $x \in A$. Or $x - x_*$ vérifie $C(x - x_*) = 0$ donc $x - x_* \in \mathrm{Ker}(C)$. Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Im}(C^T)^\perp$ pour montrer le résultat. En effet, $\nabla(Cx + b) = C^T$ et la condition $\langle \nabla J(x_*), x - x_* \rangle = 0$ pour tout $x - x_* \in \mathrm{Im}(C^T)^\perp$ s'écrit $\nabla J(x_*) \in \mathrm{Im}(C^T)$ donc il existe $\Lambda \in \mathbb{R}^p$ tel que $\nabla J(x_*) = -C^T \Lambda$.

Montrons donc que $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Im}(C^T)^\perp$. Pour $x \in \mathrm{Ker}(C)$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, $\langle y, Cx \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle C^T y, x \rangle = 0$, donc par équivalence $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Im}(C^T)^\perp$. □

Dans le cas de contraintes linéaires, on voit que la condition de qualification de contraintes n'est pas nécessaire et dans ce cas, si x_* est un minimiseur du problème d'optimisation sous contraintes d'égalité on a que $\nabla J(x_*) \in \mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_*), \dots, \nabla g_p(x_*))$.

La condition de qualification des contraintes est nécessaire dans le cas nonlinéaire, pour s'assurer d'être dans un cadre où on peut appliquer la théorie de la géométrie différentielle (et pour pouvoir appliquer un théorème d'inversion locale au point x_*).

Remarque 2.18. *Dans le cas général, la preuve repose sur des arguments de géométrie différentielle. Soit $G(x) = [g_1(x), \dots, g_p(x)]^T$. Si $\nabla G(x_*)$ est de rang p, localement dans un voisinage V de x_*, $A \cap V$ définit une variété différentielle de dimension p, dont l'espace tangent en x_* est défini par $T_{x_*}(A \cap V) = \{\nabla g_1(x_*), \dots, \nabla g_p(x_*)\}^\perp$. En reprenant le même schéma que la preuve précédente, on fixe $y \in T_{x_*}(A \cap V)$ et $t \mapsto x(t)$ une trajectoire telle que pour tout $t \in [-1, 1], x(t) \in A \cap V$, $x(0) = x_*$ et $\dot{x}(0) = y$. Dans ce cas, par les mêmes calculs, on montre que $\langle \nabla J(x_*), y \rangle = 0$, donc $\nabla J(x_*) \perp T_{x_*}(A \cap V) = \{\nabla g_1(x_*), \dots, \nabla g_p(x_*)\}^\perp$. On en déduit que $\nabla J(x_*) \in \mathrm{Vect}(\nabla g_1(x_*), \dots, \nabla g_p(x_*))$.*

2.3.2 Contraintes d'inégalité

Dans le cas de contraintes d'inégalité, A est décrit par un ensemble de fonctions $(h_i)_{1 \le i \le q}$ de Ω dans $\mathbb{R}$ supposées continues. L'ensemble admissible A est alors donné par

$$A = \{x \in \Omega \mid \forall 1 \le i \le q, h_i(x) \le 0\}. \tag{9}$$

Le problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité est donné par

$$\min_{x \in A} J(x), \tag{10}$$

où J est une fonction de $\Omega \subset X$, où X est un espace de Banach, dans $\mathbb{R}$.

Ces problèmes sont en fait équivalents aux problèmes d'optimisation avec contraintes *d'égalité* mais avec des variables additionnelles.

Pour simplifier la discussion, supposons que $q = 1$ et considérons le problème d'optimisation

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, h(x) \le 0} J(x),$$

où $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue. Supposons que x_* est une solution du problème d'optimisation au dessus et posons $\varepsilon_* \ge 0$ tel que $h(x_*) = -\varepsilon_*^2$.

Soit $\tilde{h}(x, \varepsilon) = h(x) + \varepsilon^2$ et considérons le problème d'optimisation avec contraintes d'égalité

$$\min_{(x,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \tilde{h}(x,\varepsilon) = 0} J(x).$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\tilde{h}(x, \varepsilon) = 0$, on a $h(x) = -\varepsilon^2 \leq 0$. Donc l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\tilde{h}(x, \varepsilon) = 0$ pour un certain $\varepsilon \in \mathbb{R}$ est inclus dans $\{x \mid h(x) \leq 0\}$. On a donc

$$\min_{(x,\varepsilon)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, \tilde{h}(x,\varepsilon)=0} J(x) \geq \min_{x\in\mathbb{R}^n, h(x)\leq 0} J(x).$$

Or (x_*, ε_*) vérifie $\tilde{h}(x_*, \varepsilon_*) = 0$ donc

$$\min_{(x,\varepsilon)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, \tilde{h}(x,\varepsilon)=0} J(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^n, h(x)\leq 0} J(x).$$

On peut écrire alors l'équation d'Euler-Lagrange pour le problème augmenté d'une variable et sous l'hypothèse que $\begin{bmatrix} \nabla h(x_*) \\ 2\varepsilon_* \end{bmatrix} \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{bmatrix} \nabla J(x_*) \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \nabla h(x_*) \\ 2\varepsilon_* \end{bmatrix} = 0.$$

On a alors la dichotomie suivante

(i) si $h(x_*) = 0$, alors $\varepsilon_* = 0$ donc on retrouve les équations d'Euler-Lagrange du cas d'égalité $\nabla J(x_*) + \lambda \nabla h(x_*) = 0$

(ii) si $h(x_*) < 0$, nécessairement $\lambda = 0$, donc $\nabla J(x_*) = 0$: le minimum étant atteint dans l'intérieur de l'espace admissible A, la contrainte est alors invisible (notons que ceci est une particularité du cas avec une unique contrainte d'inégalité).

Ce résultat peut alors être généralisé pour des problèmes d'optimisation avec contraintes d'inégalité ou de contraintes mixtes. Soit $I_0(x_*)$ l'ensemble des contraintes saturées au point x_* :

$$I_0(x_*) = \{i \in \{1, \dots, q\} / \quad h_i(x_*) = 0\}.$$

Définition 2.19. *On dit que les contraintes sont qualifiées au point x_* si les vecteurs $\nabla h_i(x_*)$, pour $i \in I_0(x_*)$, sont linéairement indépendants.*

Théorème 2.20 (Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT))**.** *Soient J et $(h_i)_{1\leq i\leq q}$ des fonctions continûment dérivables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose les contraintes qualifiées au point x_*. Alors une condition nécessaire pour que x_* soit un minimum de J sur l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}^n,\, h_i(x) \leq 0, \forall 1 \leq i \leq q\}$ est qu'il existe des réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ (appelés multiplicateurs de Kuhn-Tucker ou de Lagrange généralisés) tels que*

$$\nabla J(x_*) + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \nabla h_i(x_*) = 0, \text{ où } \lambda_i h_i(x_*) = 0 \text{ pour } i \in \{1, \dots, q\}. \tag{11}$$

Cette équation est appelée conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

3 Algorithmes

3.1 Optimisation sans contrainte

3.1.1 Méthodes de descente

Définition 3.1. *Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$. On dit que d est une direction de descente si*

$$\langle \nabla J(x), d \rangle < 0.$$

Proposition 3.2. *Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla J(x) \neq 0$, $d \in \mathbb{R}^n$. Si d est une direction de descente en x, alors il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\forall \alpha \in [0, \eta[, \qquad J(x + \alpha d) < J(x).$$

Les algorithmes de descente sont de la forme

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t_k d^{(k)}$$

où $d^{(k)}$ est la direction de descente et t_k est appelé le pas de descente.

3.1.2 Méthodes de gradient à pas fixe, variable et optimal

Les méthodes de gradient consistent à choisir comme direction de descente $d^{(k)} = -\nabla J(x^{(k)})$. Ce choix est motivé par le fait que par la formule de Taylor

$$J(x + td) = J(x) + t\langle \nabla J(x), d\rangle + o(t\|d\|),$$

donc pour $t\|d\|$ petit, le terme dominant est le produit scalaire $\langle \nabla J(x), d\rangle$ qui est maximal pour d dans la direction de $\nabla J(x)$. Elles s'écrivent donc

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - t_k \nabla J(x^{(k)}).$$

Pour $t_k = t$ constant, on obtient la méthode de *gradient à pas fixe*. Sinon, on parle de méthode de *gradient à pas variable*. En particulier, si on prend t_k (s'il existe) réalisant

$$J(x^{(k)} - t_k \nabla J(x^{(k)})) = \inf_{t \in \mathbb{R}} J(x^{(k)} - t \nabla J(x^{(k)}))$$

on obtient la méthode du *gradient à pas optimal*.

Théorème 3.3. *Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continûment dérivable, vérifiant*

- $\star$ *J est α-convexe*
- $\star$ *∇J est M-lipschitzienne*
- $\star$ *$\exists c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 < c_1 \leq t_k \leq c_2 < \frac{2\alpha}{M^2}$.*

Soit $x_* \in \mathbb{R}^n$ l'unique minimiseur de J : $J(x_*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} J(x)$. Alors la méthode de gradient à pas variable

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - t_k \nabla J(x^{(k)})$$

converge vers x_* pour tout choix de x_0, de façon géométrique :

$$\exists \beta \in]0, 1[, \quad \|x^{(k)} - x_*\| \leq \beta^n \|x_0 - x_*\|.$$

3.2 Optimisation avec contraintes

3.2.1 Contraintes d'égalité

Méthode de Newton On peut adapter la méthode de Newton à la minimisation d'une fonction J avec des contraintes égalité. Si l'ensemble des contraintes s'écrit

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad g_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq p\} \tag{12}$$

où $g_1, \ldots, g_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continûment dérivables, tels que $\nabla g_1(x_*), \ldots, \nabla g_p(x_*)$ sont linéairement indépendants, la condition nécessaire d'optimalité au point x_* s'écrit d'après le Théorème 2.17

$$\nabla J(x_*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x_*) = 0, \tag{13}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les multiplicateurs de Lagrange. La méthode consiste alors, en posant

$$F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla J(x) + \langle \lambda, G(x) \rangle \\ G(x) \end{bmatrix}, \qquad \text{avec} \qquad G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{bmatrix},$$

à déterminer x_* en résolvant l'équation $F(x, \lambda) = 0$ par une méthode de Newton.

Méthode de pénalisation On suppose ici que l'ensemble admissible A est tel qu'il existe une fonction continue $\phi :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tel que

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x) = 0. \tag{14}$$

L'idée de la méthode consiste à remplacer J par une fonction J_ε définie par

$$J_\varepsilon(x) = J(x) + \frac{1}{\varepsilon}\phi(x) \tag{15}$$

et à minimiser J_ε pour des valeurs de ε de plus en plus petites. Le résultat suivant vient justifier cette méthode dans le cas où ϕ et J sont convexe et strictement convexe respectivement.

Proposition 3.4. *Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$* **strictement convexe**, **coercive**, *définie sur $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une fonction $\phi :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$* **convexe** *continue vérifiant (14), et on définit J_ε par (15). Alors*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \ \exists!\, x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n,\ J_\varepsilon(x_\varepsilon) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x)$.

(ii) $\exists!\, x_* \in A,\ \lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon = x_*$ *et* $J(x_*) = \min_{x \in A} J(x)$.

Démonstration. A $\varepsilon > 0$ fixé, l'existence et l'unicité de $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ provient de la stricte convexité de J_ε. Idem pour $x_* \in A$. On a

$$J(x_\varepsilon) \le J(x_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\phi(x_\varepsilon) \le J(x_*) + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon}\phi(x_*)}_{=0 \text{ car } x_* \in A} = J(x_*)$$

Comme J est coercive, l'ensemble $\{x_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est borné. On peut donc en extraitre une sous-suite (encore notée x_ε) qui converge vers un élément $y \in \mathbb{R}^n$. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on a $J(y) \le J(x_*)$. De plus,

$$0 \le \phi(x_\varepsilon) \le \varepsilon \underbrace{J(x_*) - J(x_\varepsilon)}_{\text{terme borné}}$$

ce qui prouve par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et continuité de ϕ (en dimension finie toute fonction convexe est continue) que $\phi(y) = 0$, et donc $y \in A$. On en déduit que $y = x_*$. De plus, toute suite d'un compact possédant une seule valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. $\square$

3.2.2 Contraintes convexes

Méthode de projection On suppose ici que l'ensemble A des contraintes est un convexe fermé, que l'on note ici C. On note P_C la projection sur C :

$$P_C(x) = \arg\min_{c\in C} \|x - c\|, \tag{16}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Etant donné un algorithme $\mathcal{A}$ de minimisation sans contraintes, l'idée de la méthode de projection est de forcer la suite des itérés successifs à rester dans le convexe C, avec l'opérateur de projection C.

Algorithm 3.1 Algorithme de projection

```
1: Initialisation : Choix de x^(0) ∈ C.
2: for k ≥ 0 jusqu'à critère d'arrêt do
3:     x̂^(k+1) = A(x^(k))
4:     x^(k+1) = P_C(x̂^(k+1))
5: end for
```

Nous allons d'abord établir que l'opérateur de projection sur un convexe fermé est bien défini, puis nous énoncerons la convergence de l'algorithme de projection dans le cas de l'algorithme de gradient à pas fixe.

Proposition 3.5 (Opérateur de projection sur un convexe fermé)**.** *Si C est un ensemble convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, alors l'application P_C donnée par l'Equation (16) est bien définie. De plus on a*

(i) pour tout $c \in C$, $\langle x - P_C(x), c - P_C(x)\rangle \leq 0$

(ii) pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$ (P_C est une application contractante).

Démonstration. On montre d'abord que l'application P_C est bien définie. Pour l'unicité de la solution du problème (16), soit $c, \tilde{c} \in C$ tels que $\min_{\hat{c}\in C} \|x - \hat{c}\| = \|x - c\| = \|x - \tilde{c}\|$. Par convexité, $\frac{c+\tilde{c}}{2} \in C$ et

$$\|x - \frac{c+\tilde{c}}{2}\|^2 = \frac{1}{4}\|x - c\|^2 + \frac{1}{4}\|x - \tilde{c}\|^2 + \frac{1}{2}\langle x - c, x - \tilde{c}\rangle \leq \|x - c\|^2 = \min_{\hat{c}\in C} \|x - \hat{c}\|^2.$$

Donc par égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, soit on a $x - c = x - \tilde{c}$ donc $c = \tilde{c}$.

L'existence du minimiseur est garantie par la coercivité de la norme et le fait que C est borné. Donc l'application P_C est bien définie.

La première propriété est une conséquence de ce calcul : soit $c \in C$ alors par optimalité on a pour $t \in]0, 1]$

$$\begin{aligned}\|x - P_C(x)\|^2 < \|x - (1-t)P_C(x) - tc\|^2 = \|x - P_C(x)\|^2 + 2t\langle x - P_C(x), P_C(x) - c\rangle \\ + t^2\|P_C(x) - c\|^2.\end{aligned}$$

En prenant la limite $t \to 0$, $t > 0$, on obtient l'inégalité attendue.

Pour la seconde propriété, on a

$$\begin{aligned}
\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 &= \langle P_C(x) - P_C(y), P_C(x) - P_C(y)\rangle \\
&= \langle P_C(x) - x + x - P_C(y) + y - y, P_C(x) - P_C(y)\rangle \\
&= \langle x - y, P_C(x) - P_C(y)\rangle + \langle P_C(x) - x, P_C(x) - P_C(y)\rangle \\
&\qquad + \langle P_C(y) + y, P_C(x) - P_C(y)\rangle \\
&\leq \langle x - y, P_C(x) - P_C(y)\rangle,
\end{aligned}$$

et on conclut à l'aide d'une inégalité de Cauchy-Schwarz. □

Si $\mathcal{A}$ est l'algorithme du gradient à pas fixe, on peut montrer que cet algorithme converge pour des paramètres assez petits.

Algorithm 3.2 Algorithme du gradient projeté

Initialisation : Choix de $x^{(0)} \in C$, $t > 0$.
for $k \geq 0$ jusqu'à critère d'arrêt **do**
  $\hat{x}^{(k+1)} = x^{(k)} - t\nabla J(x^{(k)})$
  $x^{(k+1)} = P_C(\hat{x}^{(k+1)})$
end for

Théorème 3.6 (Convergence de l'algorithme du gradient projeté)**.** *Soit* $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continûment dérivable, vérifiant*

- ⋆ J *est* α*-convexe*
- ⋆ ∇J *est* M*-lipschitzienne.*

Soit $t > 0$ *tel que* $t < \frac{2\alpha}{M^2}$*. Soit* C *un ensemble convexe fermé, non vide de* $\mathbb{R}^n$*. Soit* $x_* \in C$ *l'unique minimiseur de* J *sur* C : $J(x_*) = \min_{x\in C} J(x)$*.*

Alors l'algorithme du gradient projeté converge vers x_**.*

Références

[Cia82] Philippe G Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* 1982.